Estatística I

Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.^{os} 14 e 15 (Semana 8)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Distribuição Bernoulli e Binomial

Variáveis Aleatórias Discretas

1

Distribuição Bernoulli

Na prática, existem muitas experiências que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- Uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

As experiências com alternativas *dicotómicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo sucesso-fracasso ou sucesso-insucesso.

- Essas experiências recebem o nome de ***Ensaios de Bernoulli*** ou Provas de Bernoulli e originam uma v.a. com *Distribuição Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- ***1*** se ocorrer ***sucesso***,
- ***0*** se ocorrer ***insucesso/fracasso***.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 < p < 1$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

"$X \sim$ ***Bernoulli*** (p)" representa uma v.a. com ***Distribuição Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}\text{, se ocorrer "sucesso"} \\ \mathbf{0}\text{, se ocorrer "insucesso"} \end{cases}$$

e a sua função massa de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

$$E(X) = p,$$

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p).$$

Distribuição Bernoulli: Exemplo

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 1 vez.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5*?

Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
I: "insucesso", não ocorrer face 5.

A variável X "indica" se ocorreu sucesso ou não numa prova Bernoulli!

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = P(X=1) = 1/6$ e
$\boldsymbol{q = 1 - p} = P(\text{insucesso}) = P(X=0) = 5/6$

$\Omega = \{S, I\}$

X	1	0
$P(X=x)$	1/6	5/6

$X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuições Bernoulli e Binomial

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de “sucesso”, dão origem ao ***Modelo de Probabilidade Binomial***.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios/provas de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem *Distribuição Binomial com parâmetros n e p.*

A função massa de probabilidade da v.a. X é dada por

Formulário

Notação: $X \sim Bin(n; p)$.

- **BINOMIAL** $X \sim B(n;\theta)$, $(0<\theta<1)$

$$f(x\,|\,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\ x=0,1,2,\ldots,n$$

$$E(X)=n\theta\ ;\ \ \mathrm{Var}(X)=n\theta(1-\theta)\ ;\ \ M_X(s)=\left[(1-\theta)+\theta e^s\right]^n\ ;\ \ \gamma_1=(1-2\theta)/\sigma$$

Propriedades:

- $X \sim B(n;\theta) \Leftrightarrow (n-X)\sim B(n;1-\theta)$
- $X_1 \sim B(n_1;\theta,),\ X_2 \sim B(n_2;\theta),\ X_1$ e X_2 independentes $\Rightarrow X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,\theta)$

- **BERNOULLI** $X \sim B(1;\theta)$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np \qquad Var(X)=np(1-p)$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

Resultado: Se $X \sim Bin(n; p)$, então

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{média: } \mu = \mathrm{E}(X) = n \times p \\ \text{variância: } \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p) \end{array}}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Resumindo...

A **distribuição binomial** verifica as seguintes condições:

1. A experiência tem um *nº fixo de provas*, *n*.
2. As provas são *independentes*. (O resultado de uma prova não afecta a probabilidade de ocorrência das restantes.)
3. Cada prova origina um de dois resultados possíveis: *sucesso* ou *insucesso*.
4. A probabilidade de sucesso, denotada por *p*, é *constante* em cada prova.

Ana M. Abreu - 2006/07

[PDF] Capítulo 3 Modelos Estatísticos - Free Download PDF (silo.tips)

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
I: "insucesso", não ocorrer face 5.

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e

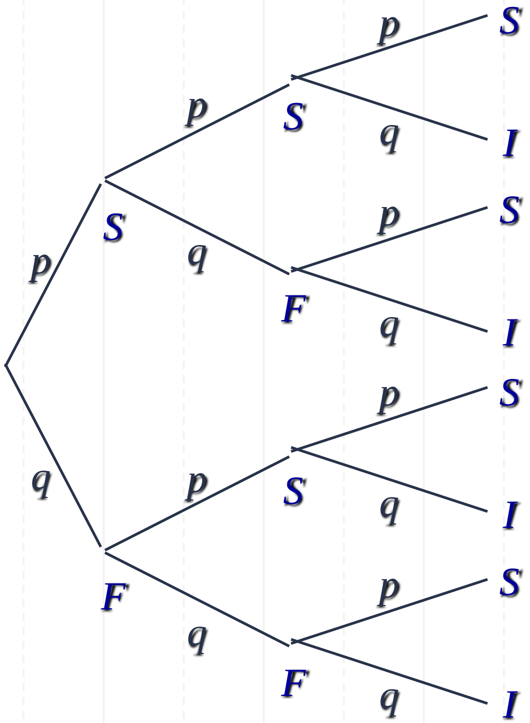
$$\boldsymbol{q = 1 - p} = P(\text{insucesso}) = 5/6$$

$$\Omega = \{SSS, SSI, SIS, ISS, SII, ISI, IIS, III\}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o *número de vezes que a face 5 é observada* nos três lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSI)	p^2q	2
(SIS)	p^2q	2
(SII)	pq^2	1
(ISS)	p^2q	2
(ISI)	pq^2	1
(IIS)	pq^2	1
(III)	q^3	0

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	**probabilidades**	**p = 1/6**
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x \, q^{3-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para n **= 3** e p **= 1/6**, $P(X = 2) = 0,0694.$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

Considere-se uma prova de escolha múltipla com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha-se que o aluno escolhe as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade dele ***acertar pelo menos a 6 questões***?

X: nº de questões que o aluno acertará
X pode assumir valores no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

P(Sucesso) = P(acertar a cada questão) = 1/4 = 0,25
n = 12

$X \sim Bin(12; 0{,}25)$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12-x}}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

$X \sim Bin(12;\ 0{,}25)$

B. Função de distribuição

N	x	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911	.1133
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049	.0017
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269	.0112
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929	.0461
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279	.1334
	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268	.2905
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437	.5000
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212	.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302	.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797	.9539

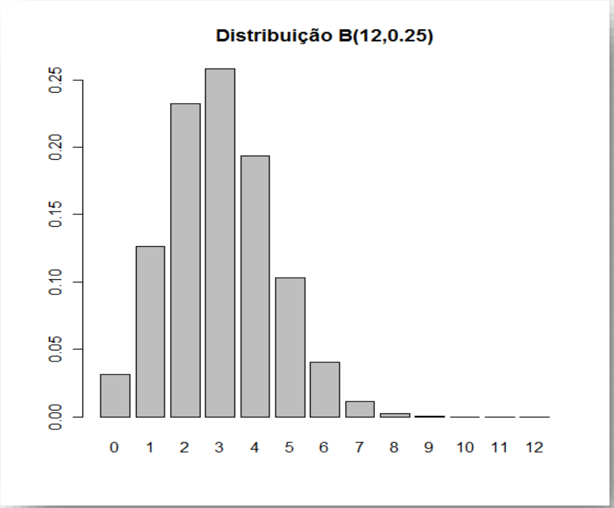
P (acertar pelo menos a 6) = $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$
$= 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0{,}9456 = 0{,}0544$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
 [6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08

> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]         [,2]
 [1,]    0 3.167635e-02
 [2,]    1 1.267054e-01
 [3,]    2 2.322932e-01
 [4,]    3 2.581036e-01
 [5,]    4 1.935777e-01
 [6,]    5 1.032414e-01
 [7,]    6 4.014945e-02
 [8,]    7 1.147127e-02
 [9,]    8 2.389848e-03
[10,]    9 3.540516e-04
[11,]   10 3.540516e-05
[12,]   11 2.145767e-06
[13,]   12 5.960464e-08
```




```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

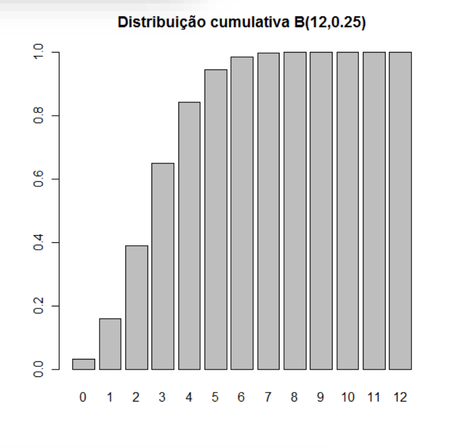
https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
 [7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000
```

```
> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]       [,2]
 [1,]    0 0.03167635
 [2,]    1 0.15838176
 [3,]    2 0.39067501
 [4,]    3 0.64877862
 [5,]    4 0.84235632
 [6,]    5 0.94559777
 [7,]    6 0.98574722
 [8,]    7 0.99721849
 [9,]    8 0.99960834
[10,]    9 0.99996239
[11,]   10 0.99999779
[12,]   11 0.99999994
[13,]   12 1.00000000
```




```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
[1] 0.05440223
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
[1] 0.05440223
```

$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$E(X) = n \times p = 12 \times 0{,}25 = 3$,

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso a todas as questões acertará 3.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Soma de Binomiais Independentes

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro** θ.

  Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

  $$Y_1 \sim B(n_1;\theta,),\ Y_2 \sim B(n_2;\theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n,\theta)$$

  onde $n = n_1 + n_2$.

Murteira et al (2015)

2

Distribuição Binomial: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

3.7 Num armazém encontra-se um lote de 10000 latas de um certo produto alimentar que está a ser preparado para ser distribuído. 500 dessas latas já ultrapassaram o prazo de validade. É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 15 embalagens escolhidas ao acaso com reposição. A inspecção rejeita o lote se forem encontradas mais do que duas latas fora do prazo de validade nessa amostra.

(a) Qual a probabilidade de rejeição do lote?

(b) Qual o número esperado de latas fora do prazo de validade?

Exercício 3.7 (a)

- **V.a. de interesse**

  X = número de latas fora do prazo de validade em 15 embalagens escolhidas ao acaso COM reposição de um lote de 10 000 latas das quais 500 já ultrapassaram o prazo de validade

- **Distribuição de X**

  A v.a. X corresponde ao número de sucessos em n provas de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com probabilidade de sucesso comum p, pelo que

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

com

$$n = 15$$

$$p = \frac{500}{10000} = 0.05$$

- **F.p. de X**

$$P(X = x) \stackrel{form.}{=} \binom{15}{x} 0.05^x (1-0.05)^{15-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 15$$

Exercício 3.7 (a)

- **Prob. pedida**

A prob. pedida pode obter-se recorrendo directamente à f.p.:

$$
\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2) \\
&= 1-P(X\leq 2) \\
&= 1-\sum_{x=0}^{2} P(X=x) \\
&= 1-\left[\binom{15}{0}0.05^0\,(1-0.05)^{15-0}+\binom{15}{1}0.05^x\,(1-0.05)^{15-1}+\binom{15}{2}0.05^2\,(1-0.05)^{15-2}\right] \\
&= 1-\left(0.95^{15}+15\times 0.05\times 0.95^{14}+\frac{15\times 14}{2}\times 0.05^2\times 0.95^{13}\right) \\
&\simeq 1-(0.463291+0.365756+0.134752) \\
&= 0.036201
\end{aligned}
$$

Alternativamente, podemos recorrer às tabelas disponíveis:

$$
\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2) \\
&= 1-P(X\leq 2) \\
&= 1-F_{Binomial(15,0.05)}(2) \\
&\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1-0.9638 \\
&= 0.0362
\end{aligned}
$$

Exercício 3.7 (a): Distribuição Binomial

$X \sim Binomial(15;0,05)$

B. Função de distribuição

N	x	θ = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029	.0009
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170	.0065
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632	.0287
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672	.0898
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373	.2120
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461	.3953
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414	.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811	.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574	.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	11	1.0000	1.0000	1.0[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	12	1.0000	1.0000	1.0[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017	.0005
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107	.0037
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424	.0176
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	.0592
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	.1509
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	.3036
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	.5000
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745	.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1-0,9638 = 0,0362$

Exercício 3.7 (b)

- **Valor esperado de** X

$$
\begin{aligned}
E(X) &\overset{form.}{=} np \\
&= 15 \times 0.05 \\
&= 0.75 \quad \notin \quad \mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}
\end{aligned}
$$

Distribuição Poisson

Variáveis Aleatórias Discretas

3

Distribuição de Poisson

Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo ou espaço.

- Carros que passam por minuto num cruzamento, durante uma dada hora do dia.
- Erros tipográficos por página num material impresso.
- Defeitos numa peça fabricada por unidade (m^2, m, etc).
- Lâmpadas queimadas numa cidade por dia.
- Problemas de filas de espera.

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson

Se *X* é uma v.a. que regista o número de ocorrências num determinado intervalo e a probabilidade de uma ocorrência é independente e a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo, então a v.a. *X* tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ e a sua função massa de probabilidade é dada por:

Formulário

- **POISSON** $X \sim \text{Po}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$

  $f(x \mid \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$; $E(X) = \lambda$; $\text{Var}(X) = \lambda$; $M_X(s) = \exp\{\lambda(e^s - 1)\}$; $\gamma_1 = \lambda^{-1/2}$

  Propriedades:

  - $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
  - Se $X \sim B(n;\theta)$, com n grande θ pequeno então $X \overset{a}{\sim} \text{Po}(n\theta)$

λ = valor esperado ou número médio de ocorrências num dado intervalo.

e = 2,71828 (Número de Euler)

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson

- **Notação:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ indica que v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ.

- Uma v.a de Poisson não tem limite superior: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

- $P(X = x \mid \lambda)$ = probabilidade de x ocorrências num determinado intervalo, sendo λ o número médio de ocorrências em tal intervalo.

- O valor médio e a variância de X são:

$$\text{Média: } \mathrm{E}(X) = \lambda$$
$$\text{Variância: } \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Processo de Poisson e Distribuição de Poisson

Num **processo de Poisson**, os acontecimentos ocorrem a uma taxa média de λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt

$$f(x \mid \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots \quad (\lambda > 0).$$

Soma de Poisson independentes

- Teorema 5.3 – Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,

  $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1),\ X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda)$ onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

Em média há 2 chamadas por hora em um certo telefone. Calcule a probabilidade de:

a) receber nenhuma chamada em 1 horas.

b) receber uma chamada em 1 horas.

c) receber uma chamada em 2 horas.

d) receber no máximo 1 chamadas em 2 horas.

e) receber pelo menos 1 chamadas em 2 horas.

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

X = número chamadas por hora em um certo telefone
$\lambda = 2$ chamadas por hora

a) $P(X = 0|\lambda = 2) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,1353$

b) $P(X = 1|\lambda = 2) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,2706$

c) $P(X = 1|\lambda = 4) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0732$

d) $$P(X \leq 1|\lambda = 4) = P(X = 0|\lambda = 4) + P(X = 1|\lambda = 4)$$
$$= \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0183 + 0,0732 = 0.0915$$

e) $$P(X \geq 1|\lambda = 4) = 1 - P(X < 1|\lambda = 4)$$
$$= 1 - P(X = 0|\lambda = 4) = 1 - 0,0183 = 0,9817$$

Distribuição de Poisson: Exemplo 2

Outro exemplo:

X = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência numa hora

$$X \sim Poisson(30)$$

Y = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência em 4 horas (20h - 24h),

$$Y \sim Poisson(30 \times 4) = Poisson(120)$$

[Errado: $\cancel{Y = 4X}$] $Y \sim Poisson(4\lambda)$

Distribuição de Poisson: Resumindo...

A **distribuição de Poisson** é uma distribuição discreta que se aplica quando ocorre um acontecimento num *intervalo especificado*. A variável aleatória *X* representa o nº de ocorrências num determinado intervalo. O intervalo pode se referir a tempo, distância, área, volume, ou algum tipo de medida similar.

[PDF] Capítulo 3 Modelos Estatísticos - Free Download PDF (silo.tips)

Distribuição de Poisson vs. Distribuição Binomial

A distribuição de Poisson difere da distribuição binomial nos seguintes aspectos fundamentais:

- **A distribuição binomial é caracterizada pela dimensão da amostra n e pela probabilidade de sucesso p, enquanto que a distribuição de Poisson é caracterizada apenas pela média μ.**

- **Numa distribuição binomial, os valores que a variável aleatória X pode tomar são $0, 1, \ldots n$, enquanto que na distribuição de Poisson a variável X toma os valores $0, 1, \ldots$, sem limite superior.**

Lei dos Acontecimentos Raros: Binomial para a Poisson

Quando $\theta = \lambda / n \to 0$, mantendo-se fixo $n\theta = \lambda$, a binomial tende para a Poisson,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^x}{x!}.$$

A **regra prática** para utilizar esta “lei” baseia-se no pressuposto de que se tem um acontecimento raro e um número “elevado” de observações.

Assim, **não é aconselhável** fazer a aproximação quando:

$0.1 < \theta < 0.9$ (quando $\theta \geq 0.9$, evidentemente que o acontecimento em causa não é “raro”, mas sim o seu complementar)

$n \leq 20$ (que são os valores de n considerados na tabela 1).

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

4

Distribuição Poisson: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

3.11 Um processo de fabrico de placas de vidro produz, em média, 4 bolhas de ar espalhadas aleatoriamente por 10 m^2 de placa. Sabendo que a distribuição do número de bolhas de ar pode ser modelada por uma distribuição de Poisson, calcule a probabilidade de:

(a) Uma placa de $2.5m \times 2m$ ter mais de 2 bolhas de ar.

(b) Obter, num lote de 10 placas de vidro com $1m \times 2.5m$, 6 placas perfeitas.

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

- **V.a.**

  X_{10} = no. de bolhas de ar espalhadas aleatoriamente por $10m^2$ de placa

- **Distribuição de X_{10}**

$$X_{10} \quad \sim \quad \text{Poisson}(\lambda_{10})$$

  com

$$\lambda_{10} \quad : \quad E(X_{10}) = 4$$

$$\lambda_{10} = 4$$

- **Nova v.a.**

  X_5 = no. de bolhas de ar espalhadas aleatoriamente numa placa de $2.5m \times 2m$

$X \sim$ Poisson(4)

Unidade = 10 m^2

$X \sim$ Poisson(2)

Unidade = 5 m^2

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

- **Distribuição de X_5**

Invocando a propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson (ver Nota 6.64 das notas de apoio), conclui-se que:

$$X_5 \sim \text{Poisson}(\lambda_5)$$

onde

$$\lambda_5 = E(X_5) = \frac{\lambda_{10}}{2} = 2$$

- **F.p. de X_5**

$P(X_5 = x) \stackrel{form.}{=} \frac{e^{-2} \times 2^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

$X \sim$ Poisson(2)

Unidade = 5 m^2

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, \ldots$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X_5 > 2) &= 1 - P(X_5 \le 2) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X_5 = x) \\ &= 1 - F_{Poisson(2)}(2) \\ &\stackrel{tabela/calc.}{=} 1 - 0.6767 \\ &= 0.3233. \end{aligned}$$

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

$X \sim Poisson(2)$

λ

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.379[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	.649[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	.838[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$

Exercício 3.11 (b): Distribuição de Poisson

- **Outra v.a.**

  Y = número de placas perfeitas (sem bolhas!), em 10 placas de vidro com $1m \times 2.5m$

- **Distribuição de** Y

$$Y \sim \text{binomial}(n, p)$$

com

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ p &= P(\text{placa de } 1m \times 2.5m \text{ perfeita}) \\ &= P(X_{2.5} = 0) \\ &= \frac{e^{-\lambda_{2.5}} \times \lambda_{2.5}^0}{0!} \\ &= e^{-\lambda_{10}/4} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

$X \sim$ Poisson(1)

Unidade = 2.5 m^2

Exercício 3.11 (b): Distribuição de Poisson

- **F.p. de Y**

  $P(Y=y)=\binom{10}{y}\left(e^{-1}\right)^{y}\left(1-e^{-1}\right)^{10-y}$, $y=0,1,2,\ldots,10$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y=6) &= \binom{10}{6}\left(e^{-1}\right)^{6}\left(1-e^{-1}\right)^{10-6} \\ &\simeq 0.083110. \end{aligned}$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np \qquad Var(X)=np(1-p)$$

Obrigada!

Questões?